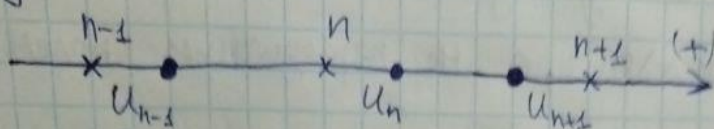


Желудков А.В.

№1



однакові атоми відхилені від вузла рівноваги на величину  $u_{n-1} > 0, u_n > 0, u_{n+1} < 0$ . При малих відхиленнях сили взаємодії можна розглядати як квазіпружні, тобто пропорційними зміні відстані між атомами. Тобто: сила, яка діє на  $n$ -й атом зі сторони  $(n-1)$  та  $(n+1)$ :

$$f_{n,n-1} = -\beta(u_n - u_{n-1}), \beta - \text{коэф. квазіпружної сили}$$

$$f_{n,n+1} = -\beta(u_n - u_{n+1})$$

$$f_n = f_{n,n-1} + f_{n,n+1} = -\beta(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1})$$

$$\text{Рівняння руху: } m\ddot{u}_n + \beta(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) = 0, \ddot{u}_n = \frac{d^2 u_n}{dt^2}$$

Відомо, що для ~~бескінечної~~ струни існує тип руху — монохроматичної хвилі:  $u(x,t) = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right)$

$$\omega = 2\pi\nu, q = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow u(x,t) = A \sin(qx - \omega t)$$

$$u(x,t) = A[\cos(qx - \omega t) + i \sin(qx - \omega t)] = A e^{i(qx - \omega t)}$$

Підставляючи до рівняння руху, отримуємо

$$-m\omega^2 = -\beta(2 - e^{-iqa} - e^{iqa})$$

$$\text{використовуючи } \cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha})$$

$$\omega^2 = 2 \beta / m (1 - \cos qa) = 4 \beta / m \sin^2 \left( \frac{qa}{2} \right)$$

$$\omega = \omega_m \left| \sin \frac{qa}{2} \right| = \omega_m \left| \sin \frac{\pi a}{\lambda} \right|, \quad \omega_m = 2 \sqrt{\beta / m}$$

якщо  $q' = q + \frac{2\pi}{a}$  підставити до  $U_n$ , тоді

$$U'_n = A e^{i(q'a_n - \omega t)} = A e^{i(qa_n - \omega t)} e^{i2\pi n} = U_n$$

отримуємо що  $U'_n = U_n$ , це означає що  $q$  та  $q'$  фізично однакові.

З теорії пружності відомо, що швидкість розповсюдження звукового імпульсу в твердому тілі  $v_0 = \sqrt{E/\rho}$

$E$  - модуль Юнга,  $\rho$  - густина. В випадку лінійного атомного ~~реш~~ ланцюжка  $\rho = m/a$ ,  ~~$E = \frac{|f_{n,n+1}|}{|u_n - u_{n+1}|}$~~

$$E = \frac{|f_{n,n+1}|}{\frac{|u_n - u_{n+1}|}{a}} = \beta a \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = a \sqrt{\beta / m}$$

При малих  $q$ :  $\omega = 2 \sqrt{\frac{\beta}{m}} \frac{aq}{2} = v_0 q$

$$v_\phi = \omega / |q| - \text{фазова}$$

$$v_{gr} = |d\omega/dq| - \text{групова}$$

$$v_\phi = v_{gr} = v_0 = \text{швидкість звука}$$

При не малих  $q$ :

$$v_\phi = v_0 \left| \frac{\sin \frac{aq}{2}}{\frac{aq}{2}} \right|, \quad v_{gr} = v_0 \left| \cos \frac{aq}{2} \right|$$